Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 17 октября 2009 г.

Третий тур. Лига тактик

1. Дан клетчатый прямоугольник со стороной клеток, равной единице. Некоторые стороны некоторых клеток покрасили. Через $n(X, Y)$ обозначим количество способов дойти из узла X в узел Y, двигаясь только по закрашенным отрезкам направо и вверх. Узлы A, B, C и D лежат на левой, верхней, правой и нижней сторонах прямоугольника соответственно. Докажите, что

$$n(A, B) \cdot n(D, C) \geqslant n(A, C) \cdot n(D, B).$$

2. Найдите все простые p и q такие, что $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

3. В ряд стоит 2009 коробок, пронумерованных числами от 1 до 2009. В первой коробке лежит 2009 камней, а в остальных — пусто. За ход разрешается из непустой коробки достать несколько камней (может быть один или все, но не ноль) и положить в следующую по номеру коробку (если она есть). Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков (начинающий или его противник) имеет выигрышную стратегию?

4. Найдите все квадраты натуральных чисел, в десятичной записи которых ровно две ненулевых цифры, одна из которых — тройка.

5. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а D — точка пересечения прямой AO с отрезком BC. Известно, что $OD = BD = \frac{1}{3}BC$. Найдите углы треугольника ABC.

6. Дана последовательность $a_n = n + [\sqrt{n}]$. (Через $[x]$ обозначается целая часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите наименьшее натуральное k, для которого a_k, a_{k+1}, $\ldots$, a_{k+2009} — последовательные натуральные числа.

7. Дано дерево с $n \geqslant 3$ вершинами. (Напомним, что деревом называется связный граф без циклов). Одну из вершин назовем корнем дерева, а все ребра ориентируем от корня. В каждой вершине напишем количество вершин, в которые из нее можно попасть (не считая саму эту вершину). Докажите, что среди написанных чисел четных будет не меньше, чем нечетных.

8. Пусть x и y — положительные вещественные числа. Докажите неравенство

$$3(x - \sqrt[3]{xy} + y) \geqslant 4\sqrt{xy} - 1.$$

9. Дано множество A, состоящее из 57 элементов, и A_1, A_2, $\ldots$, A_{57} — его подмножества, содержащие хотя бы восемь элементов. Оказалось, что любое двухэлементное подмножество множества A содержится ровно в одном из A_i. Докажите, что пересечение любых двух подмножеств A_i и A_j непусто.

10. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC. Точка H его ортоцентр, а точка D — середина меньшей дуги AC его описанной окружности. Точка P такова, что $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{BH}$. Докажите, что четырехугольник $AHCP$ — вписанный.